# EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

---

N.B. Il est demandé **EXPRESSEMENT** aux candidats de donner des démonstrations **CLAIRES, CONCISES et RIGOUREUSES.** Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur, non plus qu'une référence à un théorème du cours non précisé, ou dont on n'aurait pas contrôlé que les hypothèses sont vérifiées.
Les candidats **DOIVENT RESPECTER LES NOTATIONS** du texte et peuvent admettre le résultat d'une question non résolue pour traiter les questions suivantes.
Il est **INUTILE** de **RECOPIER** le présent énoncé.

---

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

## I

1°) Déterminer les trajectoires orthogonales de la famille des cercles de rayon R constant et centrés sur Ox.

2°) On s'intéresse à la courbe $(C_a)$ définie paramétriquement par les coordonnées du point $M_a(t)$ dans un repère orthonormé :

$$\begin{cases} x = t - a\,\text{th}\,\frac{t}{a} \\ y = \frac{a}{\text{ch}\,\frac{t}{a}} \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}_+^*$$

a. Etudier $(C_a)$ ; constuire le graphe de $(C_1)$ en prenant pour unité 4 cm.

b. Etudier la concavité de $(C_a)$ par rapport à Oy.

c. La tangente à $(C_a)$ au point $M_a(t)$ coupe Ox en un point $T_a(t)$ ; calculer $\| \overrightarrow{M_a(t)\,T_a(t)} \|$.

d. Déterminer la développée de $(C_a)$.

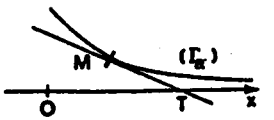
e. On considère la courbe $(C_a)$ lorsque $a \in \mathbb{R}^*$. Comment peut-on déduire le graphe de $(C_{-a})$ du graphe de $(C_a)$ ? Construire $(C_{-1})$ en prenant pour unité 4 cm.

3°) a. Montrer que ln chx admet un développement limité à l'ordre n quelconque au voisinage de $\infty$, et donner ce développement.

b. Donner une représentation paramétrique de la développante de $(C_a)$ passant par le point A de coordonnées (0,a).

c. Construire graphiquement cette développante pour a = 1 à partir du graphe de $(C_1)$, et préciser les coordonnées de ses points limites.

4°) Déterminer les courbes $(\Gamma_a)$ telles que la longueur du segment de la tangente à $(\Gamma_a)$ compris entre le point de contact M et le point d'intersection T avec Ox soit égal à la constante $a \in \mathbb{R}_+^*$.




5°) On considère maintenant la courbe $(H_a)$ définie paramétriquement par les coordonnées d'un point courant $P_a(t)$ dans un repère orthonormé :

$$\begin{cases} x = t - a\,\text{th}\,\frac{t}{a} \\ y = \frac{a}{\text{ch}\,\frac{t}{a}} \\ z = a\,\ln\,\text{ch}\,\frac{t}{a} \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}_+^*$$

Déterminer les rayons de courbure et de torsion de $(H_a)$ au point $P_a(t)$.

Tournez la page S. V. P.

## II

Soit l'équation différentielle $(E_n)$, où n est donné dans $\mathbb{Z}$

$$x\,(1-x)\,y'' + [3 + (n-2)\,x]\,y' + ny = 0 \quad (E_n)$$

1°) Résoudre $(E_0)$.

2°) Si $n \neq 0$, $(E_n)$ n'est pas d'un type classique. On cherchera s'il existe une solution particulière $y_1$ telle que $y_1(x)$ soit développable en série entière $\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$ avec $y_1(0) = 1$. Donner une relation de récurrence entre $a_{p+1}$ et $a_p$ ; déterminer le rayon de convergence de la série.

3°) a. Montrer que, si l'on connaît une solution particulière $y_1$ de $(E_n)$, la solution générale de $(E_n)$ s'obtient à partir de la résolution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on écrira.

b. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver une solution particulière simple de $(E_n)$ ; en particulier résoudre $(E_1)$.

4°) On s'intéresse au cas particulier $n = -4$. Calculer à $10^{-6}$ près la valeur prise par $y_1(\frac{1}{2})$.

## III

On appelle $\mathcal{M}_3$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1°) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Calculer $A^2$ et $A^3$.

2°) On se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice $Y \in \mathcal{M}_3$ telle que $Y^2 = A$.
Afin d'éviter d'avoir à résoudre un système non linéaire de 9 équations à 9 inconnues, on procèdera comme suit pour obtenir un système plus simple :

a. Montrer que si $\exists\, Y \in \mathcal{M}_3$ telle que $Y^2 = A$, alors $AY = YA$.
b. En déduire la propriété demandée.

3°) On va utiliser ici une autre méthode :

a. On suppose que $\exists\, Y \in \mathcal{M}_3$ telle que $Y^2 = A$. Trouver son spectre (c.a.d. l'ensemble de ses valeurs propres). En déduire son polynôme caractéristique $P_Y(X)$.

b. On admet le théorème de Cayley-Hamilton, à savoir que $P_Y(Y) = 0$. Mettre en évidence une contradiction et conclure.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail